Correction

Biosciences - Fondamentaux en maths
Septembre 2023

Consignes

Ce questionnaire sera scanné, nous vous demandons de bien vouloir adhérer aux règles suivantes :

- Pour cocher une case, la noircir (■) avec un stylo noir;
- Pour corriger, utiliser du correcteur blanc ; **Ne pas redessiner**;
- Ne rien écrire dans les marges et en-têtes ;
- Le symbole ♣ un nombre variable de bonnes réponses (0, 1, 2,...). Son absence indique qu'il n'y a qu'une bonne réponse.

Les choix multiples on un espérance nulle: bonne réponse = 1 point; pas de réponse = 0 point; mauvaise réponse à une question multiple avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points.

Tous documents permis.

Identité

Remplir les champs ci-dessous en utilisant les informations sur votre carte étudiante (si disponible)

Prénom nom Nom:

....

Numéro étudiant:

....

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Les questions sont basées sur le programme du FIMI (formation initiale à l'INSA). Il n'est pas attendu que vous puissiez répondre à toutes les questions. Ce questionnaire servira à évaluer les besoins pour une courte remise à niveau en maths courant septembre, ainsi que pour anticiper les notions de maths qui devront être couvertes lors les cours de maths du semestre.

Question 1 ♣ (FIMI1 Outils pour fonctions) Soit p le polynôme définit par $p(x) = ax - x^3$, pour $x \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, alors p

- □ a trois racines réelles
- ■ n'a qu'une racine réelle
- □ est borné
- ■ est strictement décroissant

Question 2 (FIMI1 Outils pour fonctions) Quelles équations parmis celles ci-dessous correspondent le mieux à chaque panneau de la Figure 1?

- □ (A): $y = \frac{1}{x}$; (B): $y = -1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \frac{1}{1+x}$
- □ (A): $y = \frac{1}{x}$; (B): $y = 1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \ln(x)$
- ■ (A): $y = \exp(-0.5x)$; (B): $y = -1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \ln(x)$
- □ (A): $y = \exp(-0.5x)$; (B): $y = 1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \frac{1}{1+x}$

Question 3 ♣ (FIMI1 Outils pour fonctions) Soit p le polynôme définit par $p(x) = ax - x^3$, pour $x \in \mathbb{R}$. Le point $x = 0$

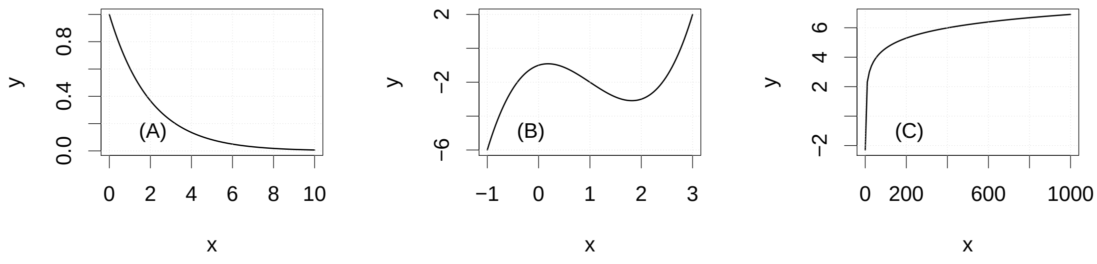

Figure 1

☐ est un maximum local de p

■ est un point d'inflexion de p

■ est une racine de p

☐ est un minimum local de p

Question 4 ♣ (FIMI2 Limites et continuité) Cochez les énoncés vrais.

☐ La fonction $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ est continue

■ $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}+2}{x} = +\infty$

☐ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}+2}{x} = +\infty$

■ La fonction $f(x) = |x|$ est continue

Question 5 ♣ (FIMI3 Dérivées) Cochez les énoncés vrais.

■ $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

☐ $\frac{d}{dx}2^x = 2^x$

■ Si deux fonctions f et g admettent une dérivée, $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dy}f(y)|_{y=g(x)}\frac{d}{dx}g(x)$

☐ La fonction f, $f(x) = \sqrt{x}$, admet une dérivée en $x = 0$

Question 6 (FIMI3 Dérivées) Soit f, g deux fonctions telles que $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La dérivée de la fonction h définie par $h(x) = f(g(x))$ est

☐ $\frac{2x}{1+x^2}$

☐ $-2x$

■ $\frac{-2x}{1+x^2}$

☐ $\frac{-2x}{(1+x^2)^3}$

Question 7 ♣ (FIMI4 Equations différentielles) Soit a, b et x_0 réels, avec $a > 0$. La solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -ax + b$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$ satisfait

☐ $x(t) = x_0 e^{-at} + \frac{b}{a}$

■ $x(t) = x_0 e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$

- ■ $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{b}{a}$
- □ L'équation n'a pas de solution

Question 8 ♣ (FIMI4 Equations différentielles) Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = f(t) + x^3$$

- □ est d'ordre 3
- □ est linéaire
- ■ est non-autonome
- ■ peut être réécrite comme le système

$$\frac{dy}{dt} = -y + f(t) + x^3,$$

$$\frac{dx}{dt} = y.$$

Question 9 ♣ (FIMI4 Equations différentielles) Soit x_0, r and K des nombres réels positifs, avec $x_0 < K$. La solution x de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x/K)$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$ possède les propriétés suivantes (cochez celle qui sont vraies):

- ■ t est un point d'inflexion si $x(t) = K/2$
- □ x atteint un maximum $x = rK/2$
- □ x est non bornée
- ■ x est bornée par K

Question 10 ♣ (FIMI6 Polynômes) Soit p le polynôme définit par

$$p(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2.$$

Le polynôme p

- ■ possède des racines non-réelles
- □ possède exactement deux racines
- ■ possède une racine double en -1
- □ possède une racine double en $i = \sqrt{-1}$

Notation petit o. Soit f et g deux fonctions. On dit que f est négligeable devant g, ce que l'on dénote $f(x) = o(g(x))$, si

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

La limite est habituellement prise à 0 ou à l'infini. Par exemple, près de $x = 0$, x^3 est négligeable devant x^2, et on écrit $x^3 = o(x^2)$. C'est vrai aussi pour des terme x^n, avec $n > 3$.

Question 11 (FIMI7 Développement limité) Soit la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ (Figure 2). Dans le voisinage de $x = 0$,

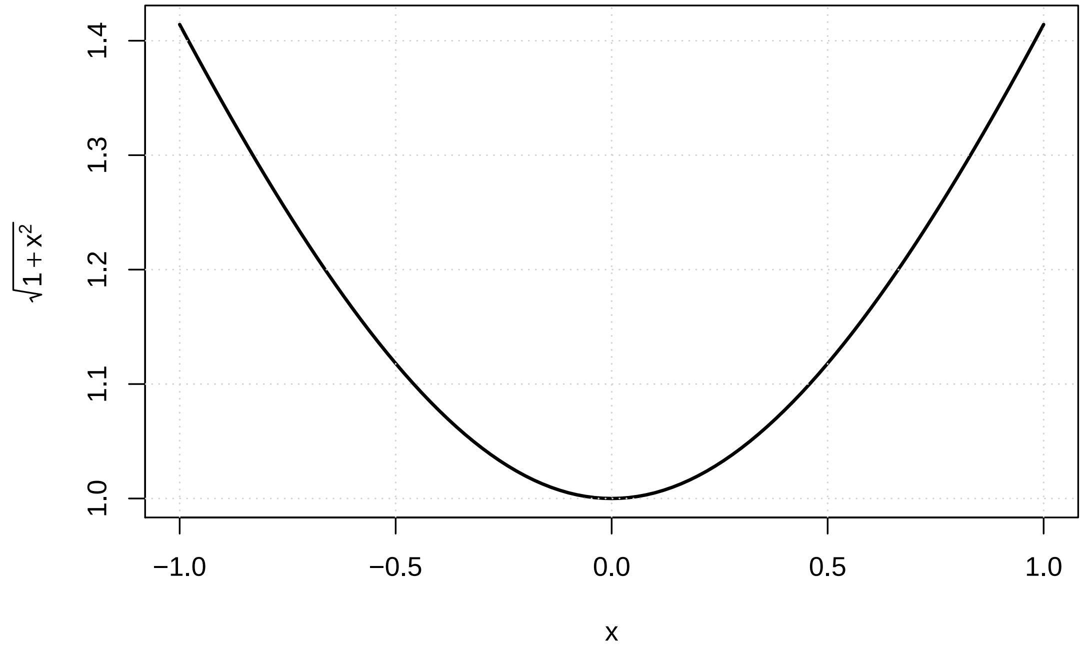

Figure 2. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$**.**

- ☐ f n'a pas de dérivée
- ☐ $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
- ■ $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- ☐ $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Question 12 ♣ (FIMI8 Intégration) Soit f une fonction telle que

$$f(x) = \begin{cases} c_0, & x \in [0,1) \\ c_1, & x \in [1,2] \end{cases},$$

et soit g une fonction continue sur l'intervalle $[0,2]$. Cochez les énoncés vrais.

- ■ $\int_0^2 f(x)dx = 0$ si et seulement si $c_0 = -c_1$
- ☐ $\int_0^2 f(x)g(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \int_0^2 g(x)dx$
- ■ $\int_0^2 f(x) + g(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$
- ■ $\int_0^2 f(x)g(x)dx = c_0 \int_0^1 g(x)dx + c_1 \int_1^2 g(x)dx$

Question 13 ♣ (FIMI9 Primitives) Cochez les énoncés vrais.

- ■ $\int e^{-3x}x^2dx = \frac{-e^{-3x}}{3}x^2 + \int \frac{2}{3}e^{-3x}xdx$
- ■ $f(x) = \sqrt{x}$ admet la primitive $\frac{2}{3}x^3/2$
- ■ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)dx = 0$
- ■ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$

Question 14 ♣ **(FIMI10 Systèmes linéaires)** Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1, \\ x + 2y - z &= 2, \\ -2x + y &= 3. \end{aligned}$$

Lesquels des systèmes suivants sont équivalent à celui ci-dessus ?

■

$$\begin{aligned} z &= \frac{31}{4}, \\ x &= \frac{3}{4}, \\ y &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} 3x - 2y \quad &+z = 1, \\ 4x \quad &= 3, \\ -2x + y \quad &= 3. \end{aligned}$$

☐

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1, \\ x + 2y - z &= 2, \end{aligned}$$

☐

$$\begin{aligned} z &= 1, \\ 4x &= 3, \\ 2y &= 9. \end{aligned}$$

Question 15 ♣ **(FIMI14 Suites)** Soit u_0 et a deux nombres réels, et soit $\{u_n\}_{n\geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n, \quad n \geq 0.$$

La suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ satisfait

- ☐ $u_{n+1} = a^n u_0$
- ☐ Si $a < 0$, alors u_n diverge vers $\pm\infty$
- ■ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ si et seulement si $|a| < 1$
- ■ $u_n = a^n u_0$

Question 16 ♣ **(FIMI15 Déterminants)** Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}.$$

- ☐ $\det A = bc - ad$
- ☐ $\det A = 0$ quelque soient a, b, c, d
- ■ $\det A = \det A^t$ (^{t} est la transposition de matrice)
- ■ $\det A = ad - bc$

Question 17 ♣ **(FIMI16 Factorisation)** Soit A, B et C les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles matrices admettent une décomposition en valeurs propres ?

- ☐ B seulement

- ☐ A et B
- ☐ A et C
- ■ B et C

Question 18 **(FIMI16 Factorisation)** Soit A, B et C les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs propres des matrices A, B et C ?

- ■ A: -2, -2; B: -1, 1; C: 1, 1
- ☐ A: -2, -2; B: 1, 1; C: 2, 2
- ☐ A: -2, 0; B: -1, 1; C: 0, 2
- ☐ A: -2, 0; B: 1, 1; C: -1, 1

Question 19 **(FIMI13 Matrices)** Trouver la matrice deux par deux A telle que pour n'importe quel vecteur $(x_1, x_2)^t$, $Ax = (x_2, x_1)^t$.

- ☐ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- ■ $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- ☐ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- ☐ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 20 **(FIMI13 Matrices)** Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A correspond à

- ☐ Une translation
- ☐ Une reflexion
- ☐ Une projection
- ■ Une rotation

Question 21 ♣ **(FIMI20 Calcul)** Soit f et g deux fonctions telles que $f(x,y) = \sin(xy)$ et $g(x,y) = 1 + e^{2x+y}$.

- ■ Le gradient ∇f définie par $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})^t$ est $(y\cos(xy), x\cos(xy))^t$
- ■ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -y^2 \sin(xy)$
- ☐ $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^{2x+y}$
- ■ Le développement limité de g autour de $(0,0)$ est $2 + 2x + y$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y)$

Question 22 **(FIMI21 Courbes et surfaces)** Considérons la courbe définie par l'équation $x - x^3 = y$, (Figure 3). La tangente au point $x = 1/2$ est

- ☐ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
- ☐ $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$
- ■ $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
- ☐ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

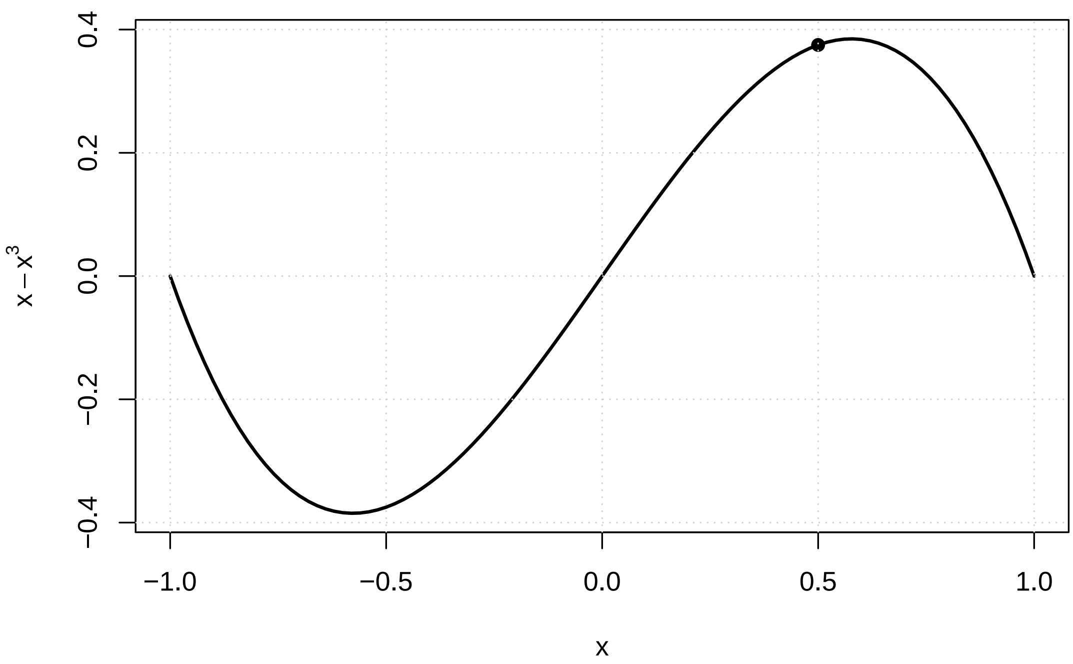

Figure 3. $x - x^3 = y$.