

Démonstrations du cours geomat

Florent Prunier

5 avril 2022

1 exercice introductif

Notation : on notera les composantes d'un vecteur $\vec{V}$, $(V^X; V^Y)$ dans la base globale et $(V^x; V^y)$ dans une base locale.

1.1 équilibre des noeuds sur la structure globale

L'équilibre du noeud 1 s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_{IV-1}^X + R_{0-1}^X = 0 \\ F_{IV-1}^Y + F_{I-1}^Y + R_{0-1}^Y = 0 \end{cases}$$

avec

$$F_{I-1}^Y = k_I (U_1^Y - U_2^Y)$$

Les termes F_{IV-1}^X et F_{IV-1}^Y s'expriment à partir de la relation dans la base locale :

$$F_{IV-1}^X = k_{IV} (U_1^x - U_3^x)$$

or

$$\begin{bmatrix} F_{IV-1}^X \\ F_{IV-1}^Y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_{IV-1}^x \\ F_{IV-1}^y \end{bmatrix}$$

d'où les relations :

$$\begin{cases} F_{IV-1}^X = k_{IV} (U_1^x - U_3^x) \cos \alpha \\ F_{IV-1}^Y = k_{IV} (U_1^x - U_3^x) \sin \alpha \end{cases}$$

de même on a :

$$\begin{bmatrix} U_1^X \\ U_1^Y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1^X \\ U_1^Y \end{bmatrix}$$

d'où les expressions de F_{IV-1}^X et F_{IV-1}^Y :

$$\begin{cases} F_{IV-1}^X = k_{IV} (\cos^2 \alpha U_1^X + \cos \alpha \sin \alpha U_1^Y - \cos^2 \alpha U_3^X - \cos \alpha \sin \alpha U_3^Y) \\ F_{IV-1}^Y = k_{IV} (\cos \alpha \sin \alpha U_1^X + \sin^2 \alpha U_1^Y - \cos \alpha \sin \alpha U_3^X - \sin^2 \alpha U_3^Y) \end{cases}$$

En intégrant ces expressions dans le premier système, on obtient les équations d'équilibre du noeud 1 dans la base globale. Puis on fait de même pour les autres noeuds, ce qui permet d'aboutir à un système globale

sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \\ U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_2^x \\ F_2^y \\ F_3^x \\ F_3^y \\ F_4^x \\ F_4^y \end{bmatrix}$$

1.2 assemblage par éléments

La matrice élémentaire d'une barre s'écrit :

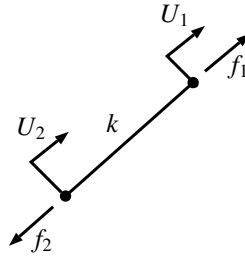


FIGURE 1 – Une barre en traction-compression

Dans sa base locale :

$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_2^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^x \\ f_2^x \end{bmatrix}$$

qui peut être réécrite pour un problème à 2 DDL :

$$\begin{pmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1^x \\ 0 \\ U_2^x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^x \\ 0 \\ f_2^x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Passage de la base locale à la base du problème :

$$\begin{bmatrix} u^x \\ u^y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u^x \\ u^y \end{bmatrix}$$

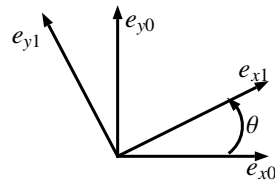


FIGURE 2 – changement de base

Soit pour le problème à 2 DDL :

$$P_{Bg-BI} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et on a :

$$\begin{aligned} K_{BI} U_{BI} &= F_{BI} \\ \Leftrightarrow P_{Bg-BI} K_{BI} U_{BI} &= P_{Bg-BI} F_{BI} \\ \Leftrightarrow P_{Bg-BI} K_{BI} P_{BI-Bg} U_{Bg} &= F_{Bg} \end{aligned}$$

avec

$$P_{BI-Bg} = P_{Bg-BI}^{-1}$$

dans le cas d'une matrice de rotation on a :

$$P_{BI-Bg} = P_{Bg-BI}^t$$

d'où

$$K_{Bg} = P K_{BI} P^t$$

1.3 Assemblage

On peut écrire chaque Matrice élémentaire dans le système globale et ajouter la contribution de chaque éléments : Exemple pour l'élément 1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & k_I & 0 & -k_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_I & 0 & k_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1^X \\ U_1^Y \\ U_2^X \\ U_2^Y \\ U_3^X \\ U_3^Y \\ U_4^X \\ U_4^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^X \\ F_1^Y \\ F_2^X \\ F_2^Y \\ F_3^X \\ F_3^Y \\ F_4^X \\ F_4^Y \end{bmatrix}$$

puis :

$$K_{tot} = K_I + K_{II} + K_{III} + K_{IV} + K_V$$

1.4 prise en compte des conditions limites

$$F = F - K(1 : 8, 1) \cdot U_1^{Ximp}$$

et suppression des lignes et colonnes où U est connu :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & x & x & x & x & x & x & x \\ c_{21} & x & x & x & x & x & x & x \\ c_{31} & x & x & x & x & x & x & x \\ c_{41} & x & x & x & x & x & x & x \\ c_{51} & x & x & x & x & x & x & x \\ c_{61} & x & x & x & x & x & x & x \\ c_{71} & x & x & x & x & x & x & x \\ c_{81} & x & x & x & x & x & x & x \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1^X \\ U_1^Y \\ U_2^X \\ U_2^Y \\ U_3^X \\ U_3^Y \\ U_4^X \\ U_4^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^X \\ F_1^Y \\ F_2^X \\ F_2^Y \\ F_3^X \\ F_3^Y \\ F_4^X \\ F_4^Y \end{bmatrix} - U_1^X$$

puis résolution de :

$$K_r U_r = F_r$$

enfin on injecte U_r dans U_{tot} et on calcul

$$K_{tot} U_{tot}$$

pour connaitre toutes les réaction nodales.

2 tenseurs

2.1 contrainte de Cauchy

L'équilibre s'écrit :

$$\sigma_{11}(x_1 + dx_1)dx_2 + \sigma_{21}(x_2 + dx_2)dx_1 - \sigma_{11}(x_1)dx_2 - \sigma_{21}(x_2)dx_1 = 0$$

or le DL à l'ordre 1 donne :

$$\sigma(x + dx) = \sigma(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

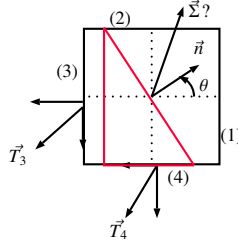
d'où le résultat. Pour les moments on a :

$$\sigma_{21}(x_1 + dx_1)dx_2dx_1/2 - \sigma_{12}(x_2 + dx_2)dx_1dx_2/2 + \sigma_{21}(x_1)dx_2dx_1/2 - \sigma_{12}(x_2)dx_1dx_2/2 = 0$$

soit après simplification et DL à l'ordre 1

$$2\sigma_{21}(x_1) - 2\sigma_{12}(x_2) + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

en négligeant le terme du premier ordre on obtient le résultat.



en déduire l'existence d'un opérateur sous forme de matrice noté $\underline{\underline{\sigma}}$ tel que $\vec{S} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$

Soit a la largeur du côté du carré, et $\vec{T}_3$, $\vec{T}_4$ et $\vec{S}$ les efforts par unité de surface. Le côté (4) vaut $a \cdot \tan \theta$ et l'hypoténuse vaut $a \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \frac{a}{\cos \theta}$. L'équilibre donne :

$$\vec{S} \frac{a}{\cos \theta} - \sigma_{11} a \vec{e}_1 - \sigma_{12} a \vec{e}_2 - \sigma_{12} a \tan \theta \vec{e}_1 - \sigma_{22} a \tan \theta \vec{e}_2 = 0$$

soit après réarrangement et simplification :

$$\vec{S} = (\sigma_{11} \cos \theta + \sigma_{12} \sin \theta) \vec{e}_1 + (\sigma_{12} \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta) \vec{e}_2$$

écriture matricielle :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$$

2.2 tenseur des déformations

On peut expliciter la fonction $\vec{\phi}$ en $2d$ pour faire apparaître explicitement le gradient ∇ d'une fonction vectorielle :

$$\vec{\phi} = \begin{cases} \phi_1(x_1, x_2) = \phi_1(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \cdot (x_2 - x_2^0) + o(\vec{x} - \vec{x}^0) \\ \phi_2(x_1, x_2) = \phi_2(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \cdot (x_2 - x_2^0) + o(\vec{x} - \vec{x}^0) \end{cases}$$

soit en écriture condensée :

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\phi}(\vec{x}^0) + \nabla \vec{\phi}(\vec{x}^0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) + o(\vec{x} - \vec{x}^0)$$

d'où l'écriture matricielle du gradient $\nabla \vec{\phi}$:

$$\nabla \vec{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

3 matrice de passage

3.1 vecteur

$$\vec{u} = X_0 \vec{x}_0 + Y_0 \vec{y}_0$$

$$\vec{u} = X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1$$

de plus :

$$\vec{x}_1 = \cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0$$

$$\vec{y}_1 = -\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0$$

En substituant ces 2 dernières expressions dans celles de la base B_1 on obtient une 2^e expression de $\vec{u}$ dans B_0 :

$$\vec{u} = (X_1 \cos \theta - Y_1 \sin \theta) \vec{x}_0 + (X_1 \sin \theta + Y_1 \cos \theta) \vec{y}_0$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix}$$

3.2 matrice

on a l'application linéaire suivante :

$$F_0 = K_0 X_0$$

et les matrices de passage suivantes :

$$X_0 = P X_1 \text{ et } F_0 = Q F_1$$

$$\Rightarrow Q F_1 = K_0 P X_1$$

$$\Leftrightarrow F_1 = Q^{-1} K_0 P X_1$$

et

$$K_1 = Q^{-1} K_0 P$$

4 invariants

4.1 I_1

$$\vec{\sigma} = \sigma_i \vec{e}_i = O\vec{M}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$O\vec{H} = (O\vec{M}\vec{u})\vec{u} = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \vec{e}_i$$

c'est la contrainte moyenne normale à chaque facette.

4.2 J_2

$$H\vec{M} = O\vec{M} - O\vec{H}$$

$$H\vec{M} = \begin{pmatrix} \sigma_1 - I_1/3 \\ \sigma_2 - I_1/3 \\ \sigma_3 - I_1/3 \end{pmatrix} = S_i$$

$$\|H\vec{M}\| = \sqrt{S_i S_i}$$

4.3 J_3

4.3.1 matrice de projection

Soit Π le sous espace sur lequel on projette, $\vec{n}$ le vecteur unitaire indiquant la direction dans laquelle on projette, $\vec{v}$ le vecteur à projeter, et $\vec{v}_p$ le vecteur projeté.

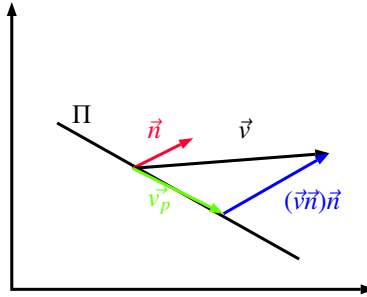


FIGURE 3 – croquis projection

Le vecteur $\vec{v}_p$ s'écrit donc :

$$\vec{v}_p = \vec{v} - (\vec{v}\vec{n})\vec{n} = \vec{v} - (\vec{n} \otimes \vec{n})\vec{v} = \left(\underline{\underline{I}} - \vec{n} \otimes \vec{n} \right) \vec{v}$$

De là on tire la matrice de projection.

Remarque : propriété fondamentale d'une projection : $P \circ P = P$.

Dans le cas particulier où :

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

, on trouve :

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

rappel sur le produit tensoriel $\otimes$:

$(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ se développe en $2d$ comme suit :

$$\begin{Bmatrix} (u_x v_x + u_y v_y) w_x \\ (u_x v_x + u_y v_y) w_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (u_x w_x) v_x + (u_y w_x) v_y \\ (u_x w_y) v_x + (u_y w_y) v_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x w_x & u_y w_x \\ u_x w_y & u_y w_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

de là on voit que :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{v}^t) \vec{u} = (\vec{w} \cdot \vec{u}^t) \vec{v}$$

et on note :

$$\vec{w} \cdot \vec{v}^t = \vec{w} \otimes \vec{v}$$

4.3.2 Angle de Lode

Soit $\pi_1^{\rightarrow}$ le projeté de $\vec{e}_1$ dans le plan de Rendulic, On a :

$$\pi_1^{\rightarrow} = P \vec{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

et $\pi_{1n}^{\rightarrow}$ le projeté normé :

$$\pi_{1n}^{\rightarrow} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\pi_{1n}^{\rightarrow} H \vec{M} = \|H \vec{M}\| \cos \theta$$

et

$$\cos \theta = \frac{\pi_{1n}^{\rightarrow} H \vec{M}}{\|H \vec{M}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2S_1 - S_2 - S_3}{\sqrt{J_2}}$$

or par construction du tenseur déviatorique on a :

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0 \Rightarrow 2S_1 - S_2 - S_3 = 3S_1$$

donc

$$\cos \theta = \frac{\pi_{1n}^T \vec{H} \vec{M}}{\|\vec{H} \vec{M}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{S_1}{\sqrt{J_2}}$$

en posant $\beta = \theta + 120^\circ$ et $\gamma = \theta + 240^\circ$ on a :

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{S_3}{\sqrt{J_2}} \text{ et } \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{S_2}{\sqrt{J_2}}$$

en utilisant :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

on a :

$$\cos^3(\theta) + \cos^3(\beta) + \cos^3(\gamma) = \cos^3(\theta) + \frac{1}{8} (\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta)^3 - \frac{1}{8} (\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)^3 = \dots = \frac{3}{4} (4 \cos^3(\theta) - 3 \cos \theta)$$

or la linéarisation de $\cos^3 x$ donne :

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

d'où

$$\cos^3(\theta) + \cos^3(\beta) + \cos^3(\gamma) = \frac{3}{4} \cos(3\theta)$$

d'autre part,

$$\cos^3(\theta) + \cos^3(\beta) + \cos^3(\gamma) = \frac{27}{6 \sqrt{6} \sqrt{J_2^3}} (S_1^3 + S_2^3 + S_3^3) = \frac{9}{2 \sqrt{6}} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}$$

d'où le résultat attendu !

$$\cos(3\theta) = \sqrt{6} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}$$

5 élasticité linéaire

5.1 isotrope

lien entre E , ν , K , G , λ et μ .

Rappel, loi de Hook :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Relation inverse :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

5.1.1 lien avec les modules de compressibilité et cisaillement

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kk} - 3 \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}$$

d'où

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

module de cisaillement : on peut faire le lien entre $\|S_{ij}\|$ et $\|e_{ij}\|$ les normes des tenseurs déviatorique des contraintes et déformations. Sinon on peut directement postuler un tenseur de contrainte purement déviatorique ($\sigma_{kk} = 0$) et il vient directement (avec $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$) :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

avec les coefficients de Lamé :

$$\sigma_{kk} = 2\mu\varepsilon_{kk} + 3\lambda\varepsilon_{kk}$$

d'où

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

et de manière directe on a :

$$G = \mu$$

5.1.2 lien paramètres de Hook vs Lamé

Avec le module de compressibilité on a :

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G$$

d'où

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

et avec le module de cisaillement on a :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$