

Mécanique des Roches

Chapitre IV

Support de cours provisoire 4^{ème} année
2021-2022

MODÉLISATION ELASTIQUE ET ELASTOPLASTIQUE

Deux versions

- une version synthétique pour donner le cadre
- une version détaillée pour expliquer plus en détail l'origine des modèles élastoplastiques

VERSION 1: VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

Notations :

$$\mathbb{S} = [\delta_{ij}] = \text{tenseur de Kronecker} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & i=j \\ \delta_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sigma = p \cdot \mathbb{S} + \Delta$$

$$p = \text{contrainte moyenne} = \text{tr}(\sigma) / 3 \quad [\text{invariant}]$$

$$\Delta = \text{tenseur des déviateurs}$$

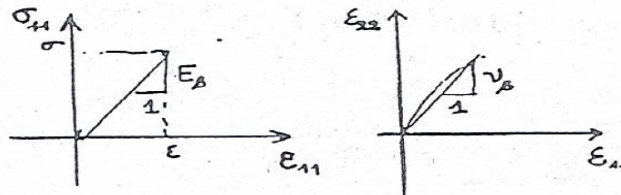
$$q = \sqrt{3} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \Delta_{ij} \Delta_{ij}}_{J_2} \right)^{1/2} \quad [\text{deuxième invariant}]$$

Elasticité isotrope

$$\varepsilon = \frac{p}{3K_s} \mathbb{S} + \frac{\Delta}{2G_s}$$

K_s : module ~~sécant~~ de compressibilité

G_s : module ~~sécant~~ de cisaillement



Essai uniaxial sans confinement

E_s = module d'Young
sécant

ν_s : coefficient de
Poisson sécant

VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

$$K_s = \frac{E_s}{3(1-2\nu_s)}$$

$$G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$$

ii T_σ est un trajet fermé de contrainte

→ $\mathcal{E}$ réversible (1)

→ $\int_{T_\sigma} \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}$ devrait être = 0 (2)

isotropie initiale $\Rightarrow$ K_s et G_s fonctions
de p et q seulement

$$\begin{aligned} \delta W_e = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} &= \left[\frac{p}{K_s} + p^2 \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{K_s} \right) + \frac{q^2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{G_s} \right) \right] dp \\ &+ \\ &\left[\frac{q}{3G_s} + p^2 \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{K_s} \right) + \frac{q^2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{G_s} \right) \right] dq \end{aligned}$$

Condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{p}{K_s} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{q}{3G_s} \right) \quad (3)$$

VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

$$\delta W_e^0 = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \frac{p}{K_0} dp + \frac{q}{3G_0} dq$$

(3) $\Rightarrow$ W_e existe

et donc $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W_e}{\partial \sigma_{ij}}$

ε_{ij} dérive d'un potentiel fonction de σ

le matériau est dit HYPERELASTIQUE

Cas de l'hypéélasticité

$$d\varepsilon = \frac{dp}{3K_t} \mathbb{I} + \frac{ds}{2G_t} = \mathbb{D}_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (4)$$

K_t et G_t sont des modules tangents

si $d\varepsilon$ n'est pas intégrable, sur T_0

$\Rightarrow$ déformation résiduelle
dissipation d'énergie

VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

Condition nécessaire et suffisante pour la non-dissipation d'énergie sur T_0 :

$$\delta W_e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{p}{K_t} \cdot dp + \frac{q}{3G_t} \cdot dq$$

On retrouve la condition (3) avec les modules tangents pour que W_e existe

Condition nécessaire et suffisante pour la réversibilité de T_E sur T_0 :

on peut démontrer que

$$\boxed{\frac{\partial D_{ijkl}}{\partial \sigma_{mn}} = \frac{\partial D_{ijmn}}{\partial \sigma_{kl}}}$$

c'est à dire

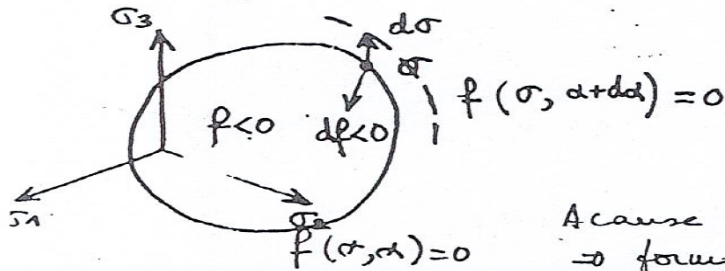
$$\begin{cases} G_t = \text{constante} \\ K_t = K_t(p) \text{ ou constante} \end{cases}$$

ce qui n'est pas valable pour les sols
car $G_t \neq G_t(p)$ et $K_t \neq K_t(p, q)$

VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

$$f(\sigma, \alpha) \leq 0$$

α = variables d'écrouissage.



A cause de l'anisotropie des entités
 $\rightarrow$ formalisme trop simple en décharge

$f < 0 \rightarrow$ élasticité

$f = 0$ et $df = 0 \rightarrow$ écoulement plastique

$f = 0$ et $df < 0 \rightarrow$ décharge élastique

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$

ϵ^p dépend de toute l'histoire de la déformation depuis un état initial vierge.

$\Rightarrow$ définition incrémentale :

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad \text{si écoulement plastique}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

Relation de consistance

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (C)$$

On postule que $d\alpha$ est une fonction homogène de degré 1 des composantes de $d\varepsilon^p$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot d\alpha = -A \cdot d\lambda$$

où A est le module d'écrouissage = $(\sigma, \varepsilon^p, \alpha)$

$$(C) \text{ devient } A d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma$$

$$\text{avec } d\sigma = \mathbb{D} \cdot d\varepsilon^e = \mathbb{D} \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

$$d\sigma = \mathbb{D} \left(d\varepsilon - d\lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)$$

$$\text{on obtient } d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbb{D} \cdot d\varepsilon}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbb{D} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}}$$

$$\text{et } d\varepsilon^p = \frac{1}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \mathbb{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \mathbb{D} \cdot d\varepsilon$$

VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

$$d\sigma = D_T : d\varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} = D \varepsilon^e \\ = D (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \end{array} \right)$$

$$D_T = D - \frac{1}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma} D \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \cdot D \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \cdot D$$

D_T : non symétrique si $f \neq g$
c'est à dire si la loi d'écoulement
n'est pas associée.

Pour connaître complètement D_T il faut
définir A c'est à dire les variables d'écrouissage
et leur évolution.

on utilise pratiquement :

ε_v^p : déformation volumique plastique

ε_d^p : déformation déviatorique plastique

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_v^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = \text{tr}(\varepsilon^p) \\ \varepsilon_d^p = \left(\frac{2}{3} e_{ij}^p \cdot e_{ij}^p \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad \text{avec } e_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_v^p}{3} \delta_{ij}$$

(↑ noté aussi ε_{II}^p)

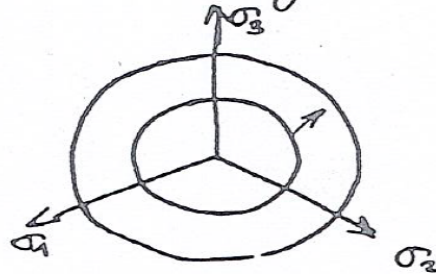
Remarque : les déviations de ε^p

VERSION TRES ABREGEE DU DOCUMENT

Différents types d'écroutissage sont possibles

> isotrope

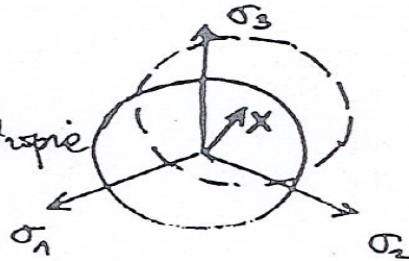
$$f(\sigma, \kappa) = 0$$



"dépend de ϵ_r^p "

> cinématique
engendré par l'anisotropie
du matériau.

$$f(\sigma - \kappa, \kappa) = 0$$



translation de la
surface de charge.
"dépend de κ "

Le critère de plasticité f peut être

> isotrope (s'exprime en fonction des invariants
de σ et D)

> anisotrope : il dépend de l'orientation
du matériau

VERSION 2: VERSION DETAILLEE
(VOIR SUPPORT DE COURS SUMMER SCHOOL)

MODÉLISATION

CRITÈRE DE HOEK & BROWN

- Critère de Hoek & Brown: pour le cas des contraintes faibles ou modérées

Comment évaluer la résistance et déformabilité d'un massif rocheux ?

En 1980 Hoek et Brown ont proposé un critère de rupture permettant d'avoir des données pour les analyses nécessaires à la **conception des excavations souterraines** dans les **roches raides**.

Il était basé à l'origine sur des analyses de la rupture fragile dans la matrice rocheuse (Hoek) et la modélisation de massif rocheux fracturé (Brown).

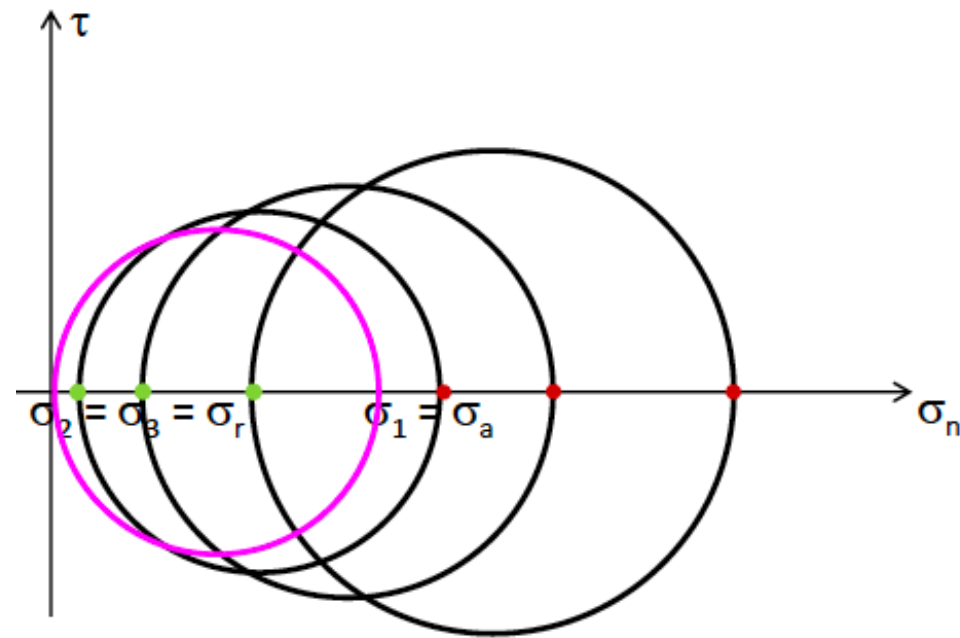
Le critère part des caractéristiques de la roche intacte et introduit des **facteurs de réduction** des propriétés basés sur les caractéristiques des joints dans un massif rocheux.

Hoek et Brown ont cherché à relier ce **critère empirique** aux **observations géologiques *in situ*** et initialement le critère se basait sur la classification RMR proposée par Bieniawski.

- Critère de Hoek & Brown: pour le cas des contraintes faibles ou modérées

Le critère généralisé de Hoek-Brown est un critère de rupture **empirique** qui permet d'ajuster les enveloppes de rupture de la roche intacte (déterminées à partir des essais de compression et triaxiaux au laboratoire) et d'un **massif rocheux fracturé** à partir des observations *in situ*.

- Critère de Hoek & Brown: pour le cas des contraintes faibles ou modérées
- Plusieurs révisions de ce critère
- Introduction d'un nouvel indice de caractérisation du massif rocheux *GSI* (différents du *RMR*)
- Il s'exprime, quelque soit sa formulation, en contraintes effectives principales.



- Pour de forts confinements

Le critère de rupture est assimilé à une droite

- Pour des confinements faibles à modérés

Le critère de rupture est supposé être parabolique (ou autre forme)

- Critère de Hoek & Brown: pour le cas des contraintes faibles ou modérées (détails par la suite)

Il est exprimé dans le plan des contraintes effectives principales

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{m\sigma_3 Rc + sRc^2}$$

Avec

- Rc la résistance en compression simple de la roche saine (obtenue pour $\sigma_3 = 0$) ;
- s : un paramètre définissant le degré de fissuration (1 pour un échantillon intact et 0 pour un matériau complètement granulaire) ;
- m : un paramètre lié à la nature de la roche (notion de cohésion, typiquement de 0.1 à 5).

- Critère de Mohr-Coulomb: pour le cas de contraintes élevées

Idem que celui des sols: c'est une droite dans le plan de Mohr

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi$$

Dans le plan des contraintes principales

$$\sigma_1 = K_p \sigma_3 + Rc$$

avec

$$K_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$Rc = 2c \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

Rque: ne prend pas en compte la forme incurvée observée expérimentalement

Il s'écrit également sous la forme

$$\sigma_1' = \sigma_3' + \sigma_{ci} \left(m_b \frac{\sigma_3'}{\sigma_{ci}} + s \right)^a$$

$$\sigma' = \sigma - u$$

- σ_1' est la contrainte effective maximum à la rupture du massif rocheux
- σ_3' est la contrainte effective minimum à la rupture du massif rocheux
- σ_{ci} est la résistance à la compression de la matrice rocheuse intacte
- m_b est la valeur de la constante m de Hoek et Brown pour le massif rocheux
(m_i est la valeur de la constante m de Hoek et Brown pour la matrice rocheuse : roche intacte)
- s et a sont des constantes adimensionnelles qui dépendent de l'état et du degré de fracturation du massif rocheux (pour la roche intacte $s = 1$)
- si $a = 1/2$ le critère est parabolique

(défini ci-après)

Le Geological Strength Index (GSI)

Le GSI : Geological Strength Index ("Indice de Résistance Géologique") est estimé à partir de facteurs qualitatifs et quantitatifs fonction de la nature pétrographique de la roche et de son degré de fracturation (idem autres classifications des massifs rocheux) qui combinés vont "noter" le massif.

Les paramètres du critère peuvent ensuite être établis depuis **2002** par :

$$m_b = m_i \cdot \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14 \cdot D}\right)$$

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3 \cdot D}\right)$$

$$a = 0,5 + \frac{1}{6} \left(e^{-GSI/15} - e^{-20/3} \right)$$

D : endommagement dépendant du degré de "perturbation" auquel le massif a été soumis du fait d'utilisation d'explosifs ou de la relaxation des contraintes. D varie de 0% à 100%.

Déformabilité du massif

Pour $\sigma_{ci} \leq 100$ MPa

$$E_m(GPa) = \left(1 - \frac{D}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{ci}}{100}} \cdot 10^{\left[(GSI-10)/40\right]}$$

Pour $\sigma_{ci} \geq 100$ MPa

$$E_m(GPa) = \left(1 - \frac{D}{2}\right) \cdot 10^{\left[(GSI-10)/40\right]}$$

Modèle empirique de résistance au cisaillement de JRC-JCS

Basé sur de nombreux résultats d'essai et sur l'observation des dommages progressifs des aspérités, Barton (1973) a proposé que les résistances de pic au cisaillement des joints pouvaient être représentées par la relation empirique,

$$\tau = \sigma_n \tan [\text{JRC} \log_{10}(\text{JCS}/\sigma_n) + \phi_r]$$

σ_n = contrainte normale effective, JRC = coefficient de rugosité des joints, JCS = résistance à la compression des parois du joint, et ϕ_r = angle de frottement résiduel drainé.

Le facteur de sécurité peut être calculé à partir de la relation suivante :

$$F = \frac{\tan(\phi_b + \text{JRC} \log(\text{JCS}/\sigma')) \sum Z}{\sum X}$$

Tutorial – supervised work

A bridge is to be constructed across a steep sided gorge cut into a massive sandstone. In order to minimize the span a site has been chosen where one face of the gorge forms a convex 'nose'. An examination of the rock mass at this location has revealed two highly persistent discontinuities dipping in approximately the same direction as the main gorge face. Details of these discontinuities are given below. Although the rock mass appears to be stable, there is some concern over the possibility of plane failure occurring on discontinuity A with the side faces of the 'nose' acting as lateral release surfaces.

Discontinuity	Dip	JRC	JCS (MPa)
A	35 °	10	5
B	80°	5	5

The geometry of the slope is shown in the following Figure 1.

The foundations for the bridge are to be placed 2 m behind the crest of the slope. It will impose a 0.2 MN/m vertical load and a 0.1MN/m horizontal load (direction same as dip direction of the slope face) on the rock mass.

The site is in an earthquake zone and the maximum likely ground acceleration determined from previous earthquake events is 0.2g.

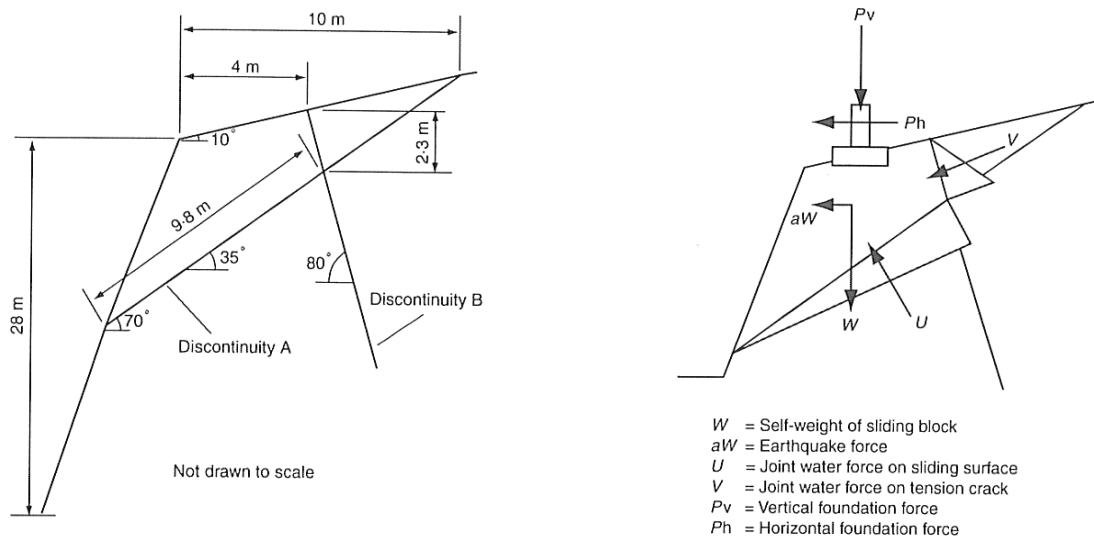


Figure 1: problem definition for plane failure example showing representation of forces acting on the slope

Determine the factor of safety against sliding for the following conditions:

- The natural slope with no foundation loading, no earthquake loading and no water in the discontinuities
- As (a) but after a period of prolonged rainfall.
- As (b) but with the earthquake loading.
- As (b) but with the foundation loading.
- As (b) but with the foundation loading and the earthquake loading.

Assume reasonable values for any parameters not given.

Solution

The forces acting on the slope are also shown in the Figure 1. It has been assumed that during the period of prolonged and heavy rainfall discontinuity B is maintained full of water and that water drains freely along discontinuity A. A value of 30° is assumed for the basic angle of friction and 25 kN/m^3 is assumed for the unit weight of the rock mass.

A section perpendicular to the face and of unit width has been taken for the analysis (Figure 1). The cross-sectional area of the sliding block is 27.5 m^2 . This was determined by drawing the cross-section to scale

on graph paper and counting squares. The self-weight of the sliding block is $25 \times 1 \times 27.5 = 687 \text{ kN/m}$.

Since a number of different force combinations are to be examined it is good practice to resolve all the forces parallel and perpendicular to the sliding surface (discontinuity A) and place the results in a table such as shown in Table 1. The calculations are shown in Figure 2.

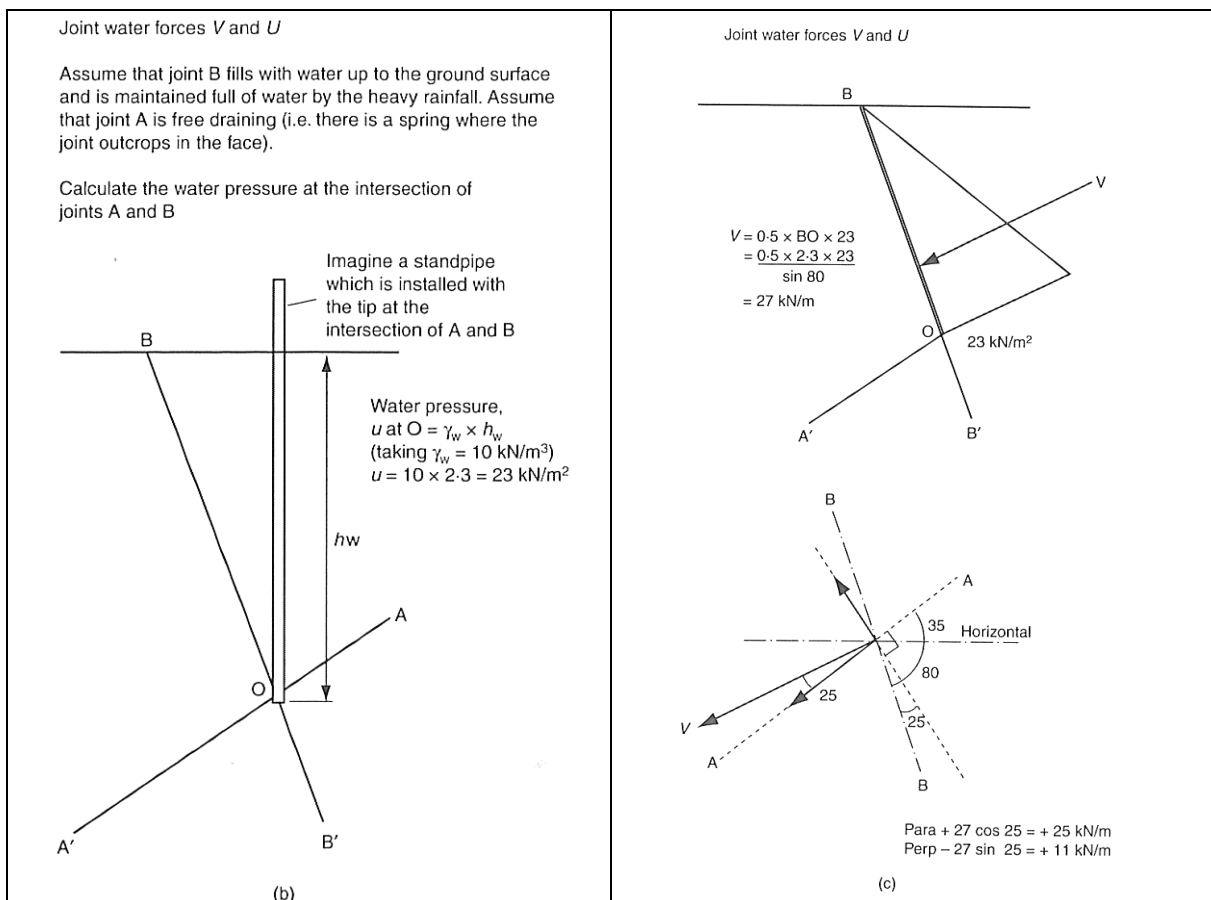
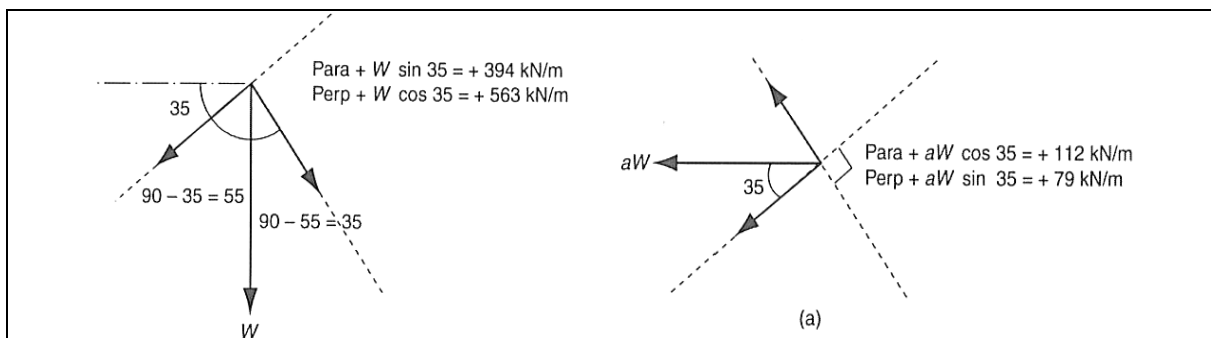
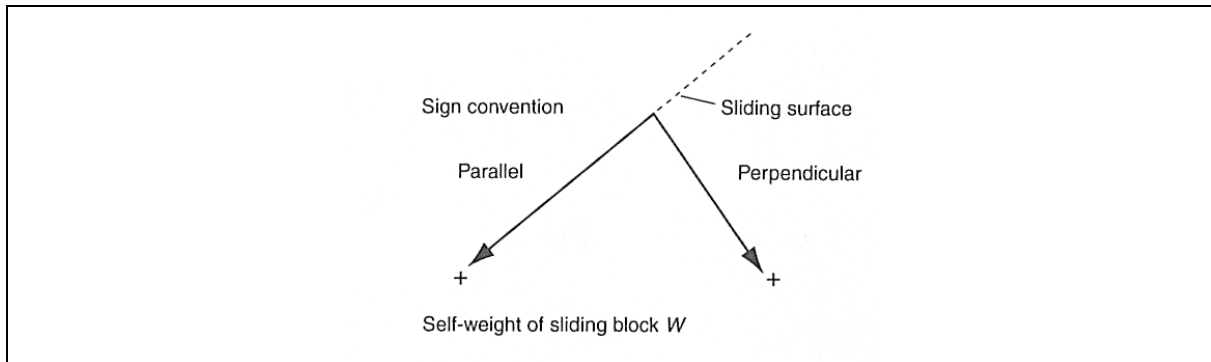
The parallel and perpendicular components can now be summed for the different combinations of forces under consideration (see Table 2). The normal stress acting on the failure surface is required by the Barton shear strength model. This may be calculated for the 1 m wide section of slope under consideration by simply dividing the sum of the perpendicular components ($\sum Z$) by the length of the sliding surface (L) which is 9.8 m in this example. The values of normal stress for each of the five cases considered are shown in Table 2.

The factor of safety in each case has been calculated using

$$F = \frac{\tan(\phi_b + \text{JRC} \log(\text{JCS}/\sigma')) \sum Z}{\sum X}$$

Table 1: Resolution of forces

Force	Magnitude (kN/m)	Parallel component (kN/m)	Perpendicular component (kN/m)
Self-weight of sliding block, W	687	+394	+563
Pseudo static force representing the earthquake loading, aW	137	+112	-79
Force V from water in discontinuity B	27	+25	- 11
Uplift force U from water in discontinuity A	113	0	-113
Vertical foundation loading, P_v	200	+115	+ 164
Horizontal foundation loading, P_h	100	+82	- 57



para : parallel plane, perp : perpendicular plane

Figure 2 : Resolution of forces acting on the slope parallel et perpendicular to the sliding surface. Earthquake force $aW : 0.2 \times 687 = 137 \text{ kN/m}$ ($a = 0.2$ is given)

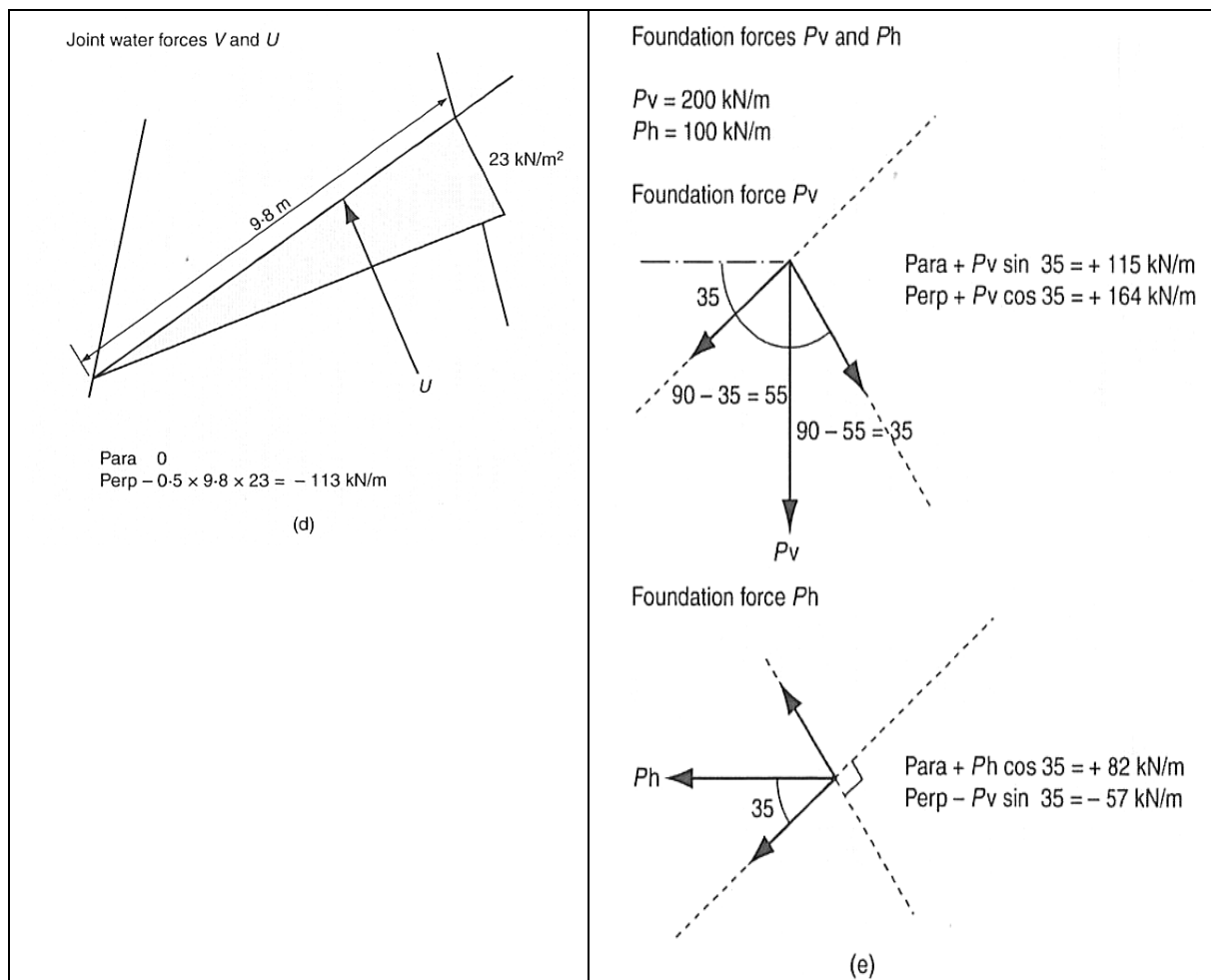


Figure 2 : Continued

The sensitivity of the factor of safety to water pressure in the discontinuities and external loads is clearly seen in Table 2. The dry slope with no external loads has a factor of safety of 1.91. The effect of filling discontinuity B with water due to prolonged and heavy rainfall has resulted in the factor of safety dropping to 1.47. The slope is still safe, however. The combination of an earthquake event and heavy rainfall, however, results in slope failure. The construction of bridge results in a dangerously low factor of safety during heavy and prolonged rainfall and failure if an earthquake occurs at the same time. This result would justify the need to carry out a more rigorous analysis of the slope using a boundary element or finite element approach.

Table 2 : Calculation of factor of safety for cases (a) to (e)

Case	Sum of parallel components $\sum X$: kN/m	Sum of perpendicular components $\sum Z$: kN/m	Normal stress on 1 m wide section $\sigma' = (\sum Z)/L$: kPa $L = 9.8$ m	Factor of safety
(a) Dry slope	394	563	57	1.67
(b) Saturated slope	$(394 + 25 + 0) = 419$	$(563 - 11 - 113) = 439$	45	1.27
(c) Saturated slope + earthquake	$(394 + 112 + 25 + 0) = 531$	$(563 - 79 - 11 - 113) = 360$	37	0.85
(d) Saturated slope + foundation	$(394 + 25 + 0 + 115 + 82) = 616$	$(563 - 11 - 113 + 164 - 57) = 546$	56	1.04
(e) Saturated slope + earthquake + foundation	$(394 + 112 + 25 + 0 + 115 + 82) = 728$	$(563 - 79 - 11 - 113 + 164 - 57) = 467$	48	0.77