SANS DOCUMENTS ! (Formulaire fourni à la fin)

Test de Frottement et Lubrification

xx/xx/2021, xx:00-xx:00

Prénom : Nom : groupe :

Lubrification hydrodynamique

On s'intéresse ici à un viscosimètre (pour mesurer la viscosité d'un fluide, supposé incompressible et à viscosité constante) facile d'utilisation et assez précis, en particulier pour les fluides de faible viscosité. Il s'inspire du viscosimètre à chute de bille, figure 1 : connaissant la géométrie et la masse m de la bille, la mesure de la vitesse de chute U (une fois celle-ci stabilisée à une valeur constante) permet d'obtenir la valeur de la viscosité dynamique η.
On conçoit alors un viscosimètre en remplaçant la bille par une pièce de presque le même rayon R que le tube, mais avec des jeux au rayon (petits par rapport à R) h_1 et h_2, et une hauteur $2b$, figure 2.
On va analyser le comportement du dispositif en utilisant la théorie de la lubrification.

1. Problème simplifié

Pour commencer, on s'intéresse à un simple jeu constant h entre deux pièces, supposées de largeur très grande, avec comme pressions aux bords p_1 et p_2, figure 3.

Question 1.
En utilisant l'équation de Reynolds 1D, déterminer l'évolution de la pression $p(x)$, et donner son allure sur la figure 4.

Reynolds 1D => évolution linéaire de la pression,
et avec les CL : $p(x) = p_1 + (p_2 - p_1)x/b$

Question 2.
En déduire l'expression de la vitesse dans le fluide, u, et de la contrainte de cisaillement sur la pièce du bas, τ.

$$u = U\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2\eta}\frac{(p_2 - p_1)}{b}y(h-y)$$
$$\tau = -\frac{\eta U}{h} - \frac{1}{2}\frac{(p_2 - p_1)}{b}h$$

Question 3.
En déduire l'expression du débit de fluide q par unité de largeur entre les pièces, ainsi que de la force tangentielle de frottement F_T par unité de largeur.

$$q = \frac{Uh}{2} - \frac{1}{2\eta}\frac{(p_2 - p_1)}{b}\frac{h^3}{6}$$
$$F_T = \tau b$$

2. Problème considéré

Question 4.

On s'intéresse maintenant à la géométrie de la figure 2 (au centre), où on prendra le cas particulier où $h_1 = 2h_2$.

A partir des expressions des questions précédentes, *en faisant l'hypothèse que l'écoulement de Couette est négligeable devant celui de Poiseuille*, montrer que les expressions de la pression p^* au centre (en $x = b$, figure 2 à droite), du débit entre les pièces q^* et de la force tangentielle totale F_T^* sont de la forme :

$$p^* = cp_f$$

$$q^* = d\frac{p_f h_2^3}{\eta b}$$

$$\cancel{F_T^* = e\frac{p_f h_2}{\eta}} \quad F_T^* = ep_f h_2$$

où vous donnerez les constantes c, d et e.

Continuité de q => $p^* = (8/9)p_f$ => $c = 8/9 = 0.89$

Et $q^* = q = \frac{1}{12}\frac{p^* h_2^3}{\eta b}$ => d = c/12 = 0.074

$F_T^* = b\left(-\frac{1}{2}\frac{(p^*-p_f)}{b}h_2 - \frac{1}{2}\frac{(0-p^*)}{b}h_1\right) = \left(1-\frac{c}{2}\right)p_f h_2$ => e = 1 - c/2 = 0.56

Vous utiliserez les expressions précédentes de p^*, q^* et F_T^* dans la suite si nécessaire.

3. Performances du viscosimètre

Dans le nouveau viscosimètre, la pièce qui chute à la vitesse U est soumise à

- son poids $-mg\vec{x}$,
- la force due à la pression p_f,
- et une force latérale verticale due au cisaillement du fluide $T\vec{x}$ où $T > 0$.

Question 5.

Le débit de fluide entre les deux pièces est noté $Q\vec{x}$ où $Q > 0$. La conservation du volume total de fluide dans le viscosimètre permet de le relier à la vitesse U. En déduire l'expression de la viscosité η en fonction de U et p_f, et en particulier des constantes c, d, ou e précédentes.

$Q = 2\pi R q^* = \pi R^2 U$ avec $q^* = d\frac{p_f h_2^3}{\eta b}$

$\eta = 2d\frac{p_f h_2^3}{bRU}$

Question 6.

En écrivant l'équilibre, et en *négligeant l'influence de T pour simplifier*, donner l'expression de la pression p_f.

$p_f = \frac{mg}{\pi R^2}$

Question 7.

Si on cherche à caractériser un fluide peu visqueux, par exemple de l'eau (de viscosité dynamique $\eta = 0{,}001$ Pa.s et de masse volumique $\rho = 1000$ kg/m^3), donner la valeur de la masse de la pièce mobile m , de la pression p_f et de sa vitesse U, avec

- rayon du tube $R = 30$ mm,
- masse volumique de la pièce mobile $\rho_b = 7800$ kg/m^3,
- constante de la pesanteur $g = 9{,}81$ m/s^2,
- hauteur $b = 10$ mm,
- épaisseur de film $h_2 = 0{,}1$ mm,
- et pour la géométrie considérée ici, on prendra $c = 0{,}8$ et $d = 0{,}06$.

$m = 2b\pi R^2 \rho_b = 0.44$ kg
$p_f = \frac{mg}{\pi R^2} = 1530$ Pa
$U = 2d\frac{p_f h_2^3}{bR\eta} = 0.61$ mm/s

Question 8.

Pour une durée nécessaire pour la mesure de vitesse de $\Delta t = 4$ s, donner les expressions et les valeurs numériques de

- la hauteur minimale L du tube,
- le volume V correspondant de fluide pour pouvoir faire la mesure.

$L = U\Delta t = 2.4$ mm
$V = \pi R^2 L = 6900$ mm^3 = 0.0069 l

Question 9.

On se propose de regarder le cas où il y a un désalignement de la pièce mobile, figure 5
Sans faire de calcul, mais en répondant de façon qualitative, que se passe-t-il avec ce défaut de positionnement ? (répondez en 1 ou 2 phrases uniquement).

La pression augmente du côté où h est le plus petit, d'où une augmentation de la force radiale W, et la pièce mobile à tendance à se recentrer.

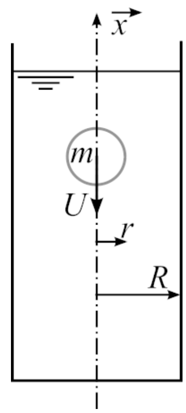

Figure 1. Principe du viscosimètre à chute de bille / Principle of the ***falling ball viscometer

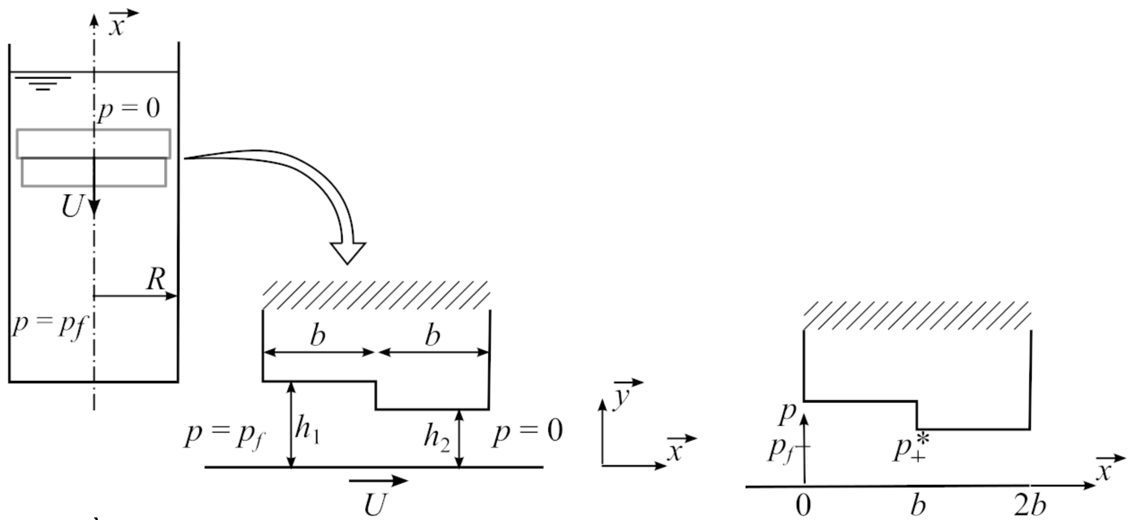

Figure 2. À gauche : principe du viscosimètre étudié / Left: principle of the studied viscometer
Au centre : zoom sur la géométrie au contact / Center: zoom on the contact geometry
À droite : Notations pour la pression / Right: Notations for pressure

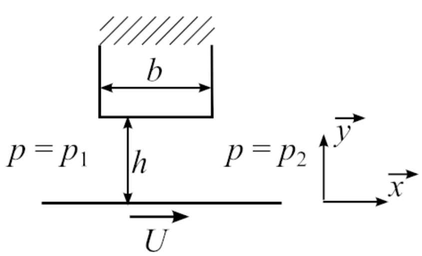

Figure 3. Problème intermédiaire de lubrification / Preliminary lubrication problem

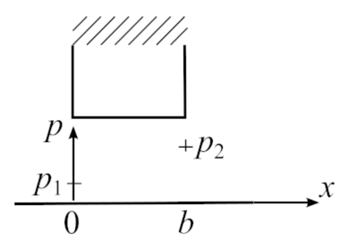

Figure 4. Allure de la pression / Pressure shape

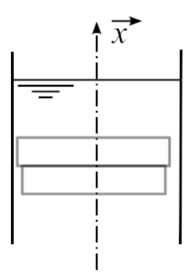

Figure 5. Défaut de positionnement / Centering defect

Formulaire

Equation de Reynolds 2D / 2D Reynolds equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho h\frac{U_1+U_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho h\frac{V_1+V_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)$$

Profil de Vitesse dans le cas 2D / Velocity profile for 2D case

$$u=\left(1-\frac{z}{h}\right)U_1+\frac{z}{h}U_2-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}z(h-z)$$

$$v=\left(1-\frac{z}{h}\right)V_1+\frac{z}{h}V_2-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial y}z(h-z)$$

Contraintes de cisaillement dans le cas 2D / Shear stresses for 2D case

$$\tau_{xz}=\eta\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\tau_{yz}=\eta\frac{\partial v}{\partial z}$$

Equation de Reynolds 1D / 1D Reynolds equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho h\frac{U_1+U_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)$$

Profil de Vitesse dans le cas 1D / Velocity profile for 1D case

$$u=\left(1-\frac{y}{h}\right)U_1+\frac{y}{h}U_2-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(h-y)$$

Contrainte de cisaillement dans le cas 1D / Shear stress for 1D case

$$\tau=\eta\frac{\partial u}{\partial y}$$