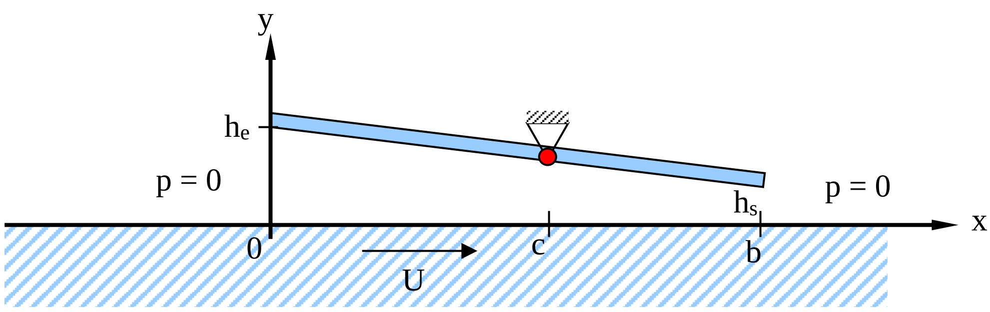
Patin incliné articulé

Hypothèses :

- milieu continu
- fluide Newtonien → Equation de Reynolds
- film mince

ρ = cte , η = cte , régime permanent



h_e : épaisseur à l'entrée du contact
h_s : épaisseur à la sortie du contact

Les résultats seront exprimés en fonction du paramètre $a = \dfrac{h_e}{h_s}$

Équation de Reynolds (1D)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\cancel{\rho} h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 6\frac{\partial\left[\cancel{\rho}(U_1+U_2)h\right]}{\partial x} + 12\frac{\cancel{\partial(\rho h)}}{\cancel{\partial t}}$$

Détermination des pressions (Reynolds)

ρ = cte, η = cte, régime permanent, $U_1 = U$, $U_2 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6\eta U\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$h(x) = (h_s - h_e)\frac{x}{b} + h_e \qquad \rightarrow \qquad h(x) = h_s\left[-(a-1)\frac{x}{b} + a\right]$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -h_s\frac{(a-1)}{b}$$

On intègre une fois par rapport à x

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta U\left[\frac{h-h^*}{h^3}\right]$$

On intègre une deuxième fois

$$\frac{\partial p}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = 6\eta U\left[\frac{h-h^*}{h^3}\right] \qquad \to \qquad \frac{\partial p}{\partial h} = \frac{6\eta Ub}{h_s\ (1-a)}\left[\frac{1}{h^2}-\frac{h^*}{h^3}\right]$$

$$\to \qquad p(x) = \frac{6\eta Ub}{h_s\ (1-a)}\left[-\frac{1}{h}+\frac{h^*}{2h^2}+cte\right]$$

Conditions aux limites :

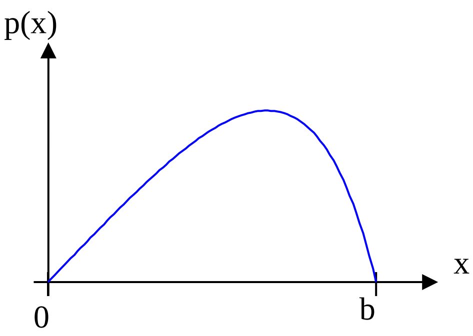
en $x = 0$, $h = h_e$ $\qquad p = 0$
en $x = b$, $h = h_s$ $\qquad p = 0$

$$\to \qquad h^* = \frac{2h_e h_s}{h_e + h_s} \qquad \text{et} \qquad cte = \frac{1}{h_e + h_s}$$

$$\to \qquad \frac{h^*}{h_s} = \frac{2a}{1+a} \qquad \text{et} \qquad cte.h_s = \frac{1}{1+a}$$

$$\to \qquad p(x) = \frac{6\eta Ub}{h_s^2\ (a-1)}\left[\frac{h_s}{h}-\frac{h_s^2}{h^2}\frac{a}{(1+a)}-\frac{1}{(1+a)}\right]$$

avec $\dfrac{h}{h_s} = (1-a)\dfrac{x}{b}+a$



Calcul de la portance

$$W = \iint p(x).dx.dz \qquad \frac{W}{L} = \frac{6\eta Ub}{h_s^2\ (1-a)}\int\left[-\frac{h_s}{h}+\frac{h_s^2}{h^2}\frac{a}{(1+a)}+\frac{1}{(1+a)}\right].\frac{dx}{dh}dh$$

$$\frac{W}{L} = \frac{6\eta Ub^2}{h_s^3\ (1-a)^2}\int\left[-\frac{h_s}{h}+\frac{h_s^2}{h^2}\frac{a}{(1+a)}+\frac{1}{(1+a)}\right].dh$$

$$\frac{W}{L} = \frac{6\eta Ub^2}{h_s^2\ (a-1)^2}\left[\ln a - 2\frac{(a-1)}{(a+1)}\right]$$

Cette portance est maximale pour une valeur de a = 2,19.

Calcul du débit

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(y-h) + U\left(1-\frac{y}{h}\right) \qquad Q_x = \iint u.dy.dz$$

$$\frac{Q_x}{L} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}.\left[\frac{-h^3}{6}\right] + \frac{Uh}{2}$$

$$\frac{Q_f}{L} = \frac{Uh^*}{2} = \frac{Uh_s}{2}\frac{2a}{(1+a)}$$

Calcul de la force de frottement

$$\tau_{xy} = \eta\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(y-h) + U\left(1-\frac{y}{h}\right) \quad \rightarrow \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h) - \eta\frac{U}{h}$$

$$F = \iint \tau_{xy}.dx.dz \qquad \frac{F}{L} = \int\left[\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h) - \eta\frac{U}{h}\right].\frac{dx}{dh}.dh$$

$$\frac{F}{L} = \frac{\eta Ub}{h_s(1-a)}\int\left[3\left[\frac{1}{h^2}-\frac{h^*}{h^3}\right](2y-h) - \frac{1}{h}\right].dh$$

<u>sur la face inférieure (y = 0):</u>

$$\frac{F_{y=0}}{L} = \frac{\eta Ub}{h_s(1-a)}\int\left[3\frac{h^*}{h^2} - \frac{4}{h}\right].dh$$

$$\boxed{\frac{F_{y=0}}{L} = \frac{\eta Ub}{h_s(a-1)}\left(-4\ln a + 6\frac{a-1}{a+1}\right)}$$

<u>sur la face supérieure (y = h):</u>

$$\frac{F_{y=h}}{L} = \frac{\eta Ub}{h_s(1-a)}\int\left[\frac{2}{h} - 3\frac{h^*}{h^2}\right].dh$$

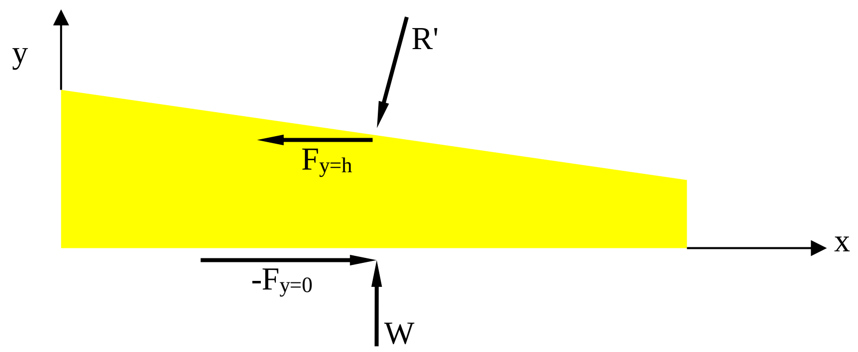
$$\boxed{\frac{F_{y=h}}{L} = \frac{\eta Ub}{h_s(a-1)}\left(2\ln a - 6\frac{a-1}{a+1}\right)}$$

Montrer que $\frac{F_{y=0}}{L} - \frac{F_{y=h}}{L} = W\frac{\partial h}{\partial x}$ **, expliquer pourquoi.**

$$\frac{F_{y=0}}{L} - \frac{F_{y=h}}{L} = \frac{6\eta Ub}{h_s(a-1)}\left(-\ln a + 2\frac{a-1}{a+1}\right) = W\frac{\partial h}{\partial x}$$

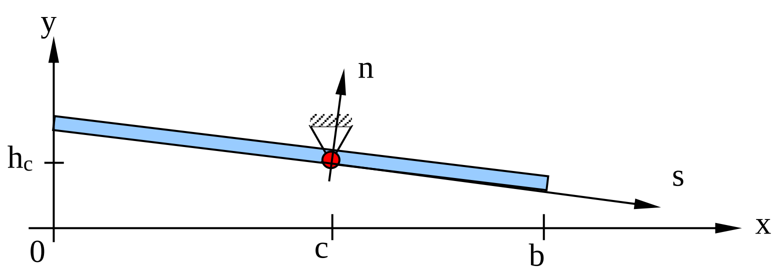
Actions des parois sur le fluide ($F_{y=0} < 0$, $F_{y=h} < 0$, $W > 0$) :

en y = 0	selon x :	$-F_{y=0}$
	selon y :	W
en y = h	selon x :	$F_{y=h} + W dh/dx$
	selon y :	-W
bilan	selon x :	$-F_{y=0} + F_{y=h} + W dh/dx = 0$
	selon y :	W - W = 0



Equilibre du patin autour de l'articulation.

L'articulation se trouve à un position x = c et y = h(c). A l'équilibre, les actions sur l'articulation seront égales aux actions du fluide sur la paroi.



Les actions du fluide sur la paroi dans un repère (s,n) incliné d'un angle α sont :

selon n : $-R' - F_{y=h}\sin(\alpha) = \frac{W}{\cos(\alpha)} - F_{y=h}\sin(\alpha)$

selon s : $\quad -F_{y=h}\cos(\alpha)$

Pour que l'articulation soit en équilibre, il faut également l'équilibre des moments. Les contraintes selon s appliquées sur la surface passent par l'articulation, leur moment est donc nul. Par contre pour les contraintes selon n, il faut :

$$\int\left[\frac{p}{\cos(\alpha)}s-\tau_{xy_{y=h}}\sin(\alpha)s\right]dx=0 \qquad \text{avec } s=\frac{x-c}{\cos(\alpha)}$$

soit $$\int\left[\frac{p}{\cos(\alpha)}s-\left(\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}-\eta\frac{U}{h}\right)\sin(\alpha)s\right]\frac{dx}{dh}dh=0$$

En négligeant les termes liés au cisaillement (en sinα), on obtient une relation univoque entre la position du pivot et le rapport a.

$$\boxed{\frac{1}{(a^2-1)}\left[\frac{(-5a^2+4a+1)}{2}+a(a+2)\ln a\right]=\frac{c}{b}\left[\ln a-2\frac{(a-1)}{(a+1)}\right]}$$