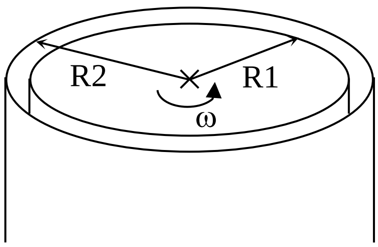
TD2 - VISCOSIMETRES

Viscosimètre de Couette - Coordonnées Cylindriques

Le viscosimètre de Couette permet de mesurer la viscosité d'un fluide introduit entre deux cylindres concentriques. Le cylindre interne tourne à la vitesse ω, le cylindre externe est fixe. Le rayon du cylindre intérieur est R1, le rayon du cylindre extérieur est R2, on notera le jeu entre cylindres C = R2 - R1, la longueur des cylindres est L.



Hypothèses :

- ρ et μ constants
- Régime permanent ($\partial/\partial t = 0$)
- Cylindres coaxiaux ($\partial/\partial\theta = 0$)
- Pas d'écoulement selon z ($w = 0$)
- v n'est fonction que de r

1) A partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (cf. annexe), calculer les vitesses u (selon r) et v (selon θ) du fluide.

2) Calculer le couple de frottement agissant sur les parois de chaque cylindre.

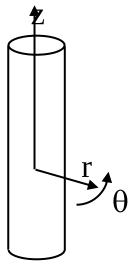
3) Considérant le jeu petit devant les rayons des cylindres ($R \approx R1 \approx R2$, $C << R$), simplifier l'expression du couple obtenue précédemment.

4) Avec R1 = 40 mm, R2 = 40.1 mm, L = 100 mm, μ = 0.01 Pa.s, ω = 100 rad/s, comparez les solutions des deux questions précédentes.

5) Quelle est la puissance dissipée ?

Viscosimètre à capillaire - Coordonnées Cylindriques

Le viscosimètre à capillaire permet de mesurer la viscosité d'un fluide qui soumis à la pesanteur s'écoule dans un tube fin. Cette viscosité est déterminée en mesurant le temps t nécessaire pour l'écoulement d'un volume V de fluide, c'est à dire la mesure du débit d'écoulement (V/t).
Le fluide est libre de s'écouler selon l'axe z qui est vertical, la seule vitesse du fluide considérée est w(r), le fluide est à pression constante.



Hypothèses :

- Régime permanent ($\partial/\partial t = 0$)
- ρ et μ constants

1) A partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (cf. annexe), calculer la vitesse w(r) du fluide.

2) Calculer le débit d'écoulement du fluide.

Equations de base (**milieu continu**) – Coordonnées Cartésiennes

- *Continuité* (conservation du débit massique)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

Ex : $\rho = cte \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

- *Equations d'équilibre* $\left(\rho\vec{\gamma} = \vec{f}\right)$ - f_i : accélération volumique

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad i=1,2,3$$

- *Loi de comportement* (**fluide newtonien**)

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

avec :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \delta_{ij} \left| \begin{array}{l} = 0 \ \text{ si } \ i \neq j \\ = 1 \ \text{ si } \ i = j \end{array} \right., \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \lambda \text{ et } \mu \quad \text{coef. de Navier}$$

Ex : $\rho = cte \quad \rightarrow \quad \theta = 0$

$$\rightarrow \quad \sigma_{xx} = -p + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

- *Lois d'état*

$\rho = (p,T)$ $\qquad\qquad$ $\mu = (p,T)$

Ex : $\mu = \mu_o e^{\alpha(p - p_o)} e^{\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_o}\right)}$

- *Thermique*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) - \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_p \frac{dp}{dt} + \lambda\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \rho C_p \frac{dT}{dt}$$

Ex : $\rho = cte \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \rho C_p \frac{dT}{dt}$

Les variables sont : u, v, w, p, T, ρ et μ

Équations de base (**μ = cte et ρ = cte**) - Coordonnées Cartésiennes

- *Continuité* (conservation du débit massique)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

- *Équations d'équilibre* $\left(\rho\vec{\gamma}=\vec{f}\right)$

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w$$

avec $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- *Loi de comportement* (**fluide newtonien**)

$$\sigma_{xx}=-p+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Équations de base (**μ = cte et ρ = cte**) - Coordonnées Cylindriques

- *Continuité* (conservation du débit massique)

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

- *Equations d'équilibre* $\left(\rho\vec{\gamma}=\vec{f}\right)$ + *Loi de comportement* (**fluide newtonien**)

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{r\partial\theta}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}\right]=\rho f_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\Delta u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial v}{r\partial\theta}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial v}{r\partial\theta}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}\right]=\rho f_\theta-\frac{\partial p}{r\partial\theta}+\mu\left[\Delta v-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{r\partial\theta}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+v\frac{\partial w}{r\partial\theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu[\Delta w]$$

avec $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- *Loi de comportement* (**fluide newtonien**)

$$\sigma_{rr}=-p+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial u}{r\partial\theta}+r\frac{\partial\left(v/r\right)}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$